金型磨きの自動化に応用する制御に関する研究

メカニックス系工学専攻　　教授　　小坂　学

１．はじめに

金型磨きロボットには位置と力の繊細な制御が必要である。そのためには、制御系の安定性を判別しておく必要がある。そのための有力な方法としてナイキストの安定判別法がある。

ナイキストの安定判別法の証明は、当初は複素関数論の Cauchy の定理に基づいてなされた 1)。その後、整理され、よりシンプルになった 2)。これらの証明では、ラプラス変換の複素変数 s が右半平面を囲む閉曲線に沿って時計回りに動くことを前提としている。しかし、ナイキスト軌跡は s の大きさが∞のときに一定値になるので、s が左半平面を囲む閉曲線に沿ったとしても同じ軌跡になる。つまり、s が右半平面を囲む閉曲線に沿ったことを、ナイキスト軌跡から見出すことができない。証明としてはそれで問題ないが、この右半平面に限定した前提を省くことができれば、この不自然さを回避できる。そこで、この前提が不要な新しい証明を行う。

2. 提案する簡単なナイキストの安定判別の証明

線形時不変な 1 入出力系のプロパーな開ループ伝達関数 L(s) の分子分母多項式をそれぞれ Ln (s)；Ld (s) とおく。L(∞)≠−1 とする。1 + L(s) と閉ループ伝達関数 Gcl (s)はそれぞれ次式で与えられる。

$$1 + L(s) = 1 + Ln(s)/ Ld (s) = (Ld (s) + Ln (s))/ Ld (s) \tag{1}$$

$$Gcl (s) = L(s)/(1 + L(s)) = Ln (s)/(Ld (s) + Ln (s)) \tag{2}$$

(1), (2) 式より、Gcl (s) の不安定な極の数 ncl は 1+L(s) の不安定な零点の数に等しく、L(s) の不安定な極の数 nop は 1+L(s) の不安定な極の数に等しい。ナイキストの安定判別法では 1 ＋ L(s) が原点を時計回りに回る回数 n が、

$$n = ncl - nop \tag{3}$$

の関係をもつことを利用して、L(s) の不安定な極の数 nop と安定限界な極とその重複度が既知のときに Gcl (s) が安定かどうかを判別する。

L(s) がプロパーで L(∞)≠ −1 なので、(1) 式より、1 + L(s) の分子分母の多項式の次数はどちらも Ld (s) の次数 N と等しい。1 + L(s) の分子分母を因数分解する。

$$1 + L(s) = k\, (s - pcl1)\, (s - pcl2)\cdots\ (s - pclN\,)/(\, (s - pop1)\, (s - pop2)\cdots(s - popN\,)\,) \tag{4}$$

ここで k は実数定数、pcl1, pcl2, …は Gcl (s) の極、pop1, pop2, …は L(s) の極である。

i) 1 + L(s) が虚軸上に極と零点をもたないとき

まず、s が虚軸上のみを動く場合にも 1+L(s) のナイキスト軌跡が閉曲線になることを示す。(4) 式より、s の大きさが∞ のとき、1 ＋ L(s) は定数 k となる。ゆえに、s が右半平面を囲む閉曲線に沿って動く場合と、s が虚軸上のみを動く場合の軌跡は一致する。1+L(s) の s による微分を考える。Ld (s) と Ln (s) は s の多項式なので、s の大きさが∞でなければ微分値が∞になるのは Ld (s) = 0 のときだけである。よって、1 + L(s) が虚軸上に極をもたないとき、ナイキスト軌跡 1 + L(s) は不連続にならないので閉曲線になる。1+L(s) が虚軸上に零点をもたないとき、軌跡はゼロにならない。このとき軌跡が原点を通らないので閉曲線の原点回りの回転数を定義できる。

つぎに(3) 式を証明する。複素数 z1, z2 について∠(z1 z2) = ∠z1 + ∠z2, ∠($z1^{-1}$) = ∠z1 が成り立

つので、(4) 式に $s = j\omega$ を代入すると、

$$\angle(1 + L(j\omega)) = \angle k + \angle(j\omega - pcl1) + \cdots + \angle(j\omega - pclN)$$
$$- \angle(j\omega - pop1) - \cdots - \angle(j\omega - popN) \quad (5)$$

が成り立つ。$\angle k = \tan^{-1} Im[k] / Re[k]$ は一定値であり、

$$\angle(j\omega - p) = \tan^{-1} Im[j\omega - p] / Re[j\omega - p] = \tan^{-1}(\omega - Im[p])/(-Re[p]) \quad (6)$$

である。p (= pcl1) が安定な極(Re [pcl1] < 0) のとき、(jω - pcl1) の ω が-∞から∞まで変化したときのベクトル軌跡の位相を考える。Re [pcl1] < 0 なので、(6) 式の分母はプラスの定数になる。まず、ω= −∞ のとき、(6) 式より位相は−90◦ である。ω が大きくなって ω = Im [pcl1]になったとき、位相は 0◦ となる。ω がさらに大きくなって ω = +∞になったとき、位相は+90◦ となる。つまり、位相は−90 → 0 → +90◦ と反時計回りに 0.5 回転する。p (= pcl2)が不安定な極(Re [pcl2] > 0) のとき、同じようにして、位相は−90 → −180 → −270◦ と時計回りに 0.5 回転する。まとめると

1)安定(Re [pcl1] < 0) のとき、(s − pcl1) の位相∠(jω − pcl1)は、反時計回りに 0.5 回転する。

2)不安定(Re [pcl2] > 0) のとき、(s − pcl2) の位相∠(jω − pcl2)は、時計回りに 0.5 回転する。

閉ループの極 pcl1; pcl2 ・・・ は N 個あり、そのうち ncl 個が不安定なので、N − ncl 個は安定である。よって次の関係が導かれる。

R1)(s − pcl1) (s − pcl2) ···(s − pclN) の位相は、反時計回りに 0.5 (N − ncl) 回転し、時計回りに 0.5ncl 回転する。つまり時計回りに−0.5 (N − ncl) + 0.5ncl = −0.5N + ncl 回転する。

次に(s − pop1) (s − pop2) ···(s − popN) の位相を考える。 (5) 式より、位相にマイナスの符号が付いているので軌跡が原点を回る方向が逆になる。これを R1) に当てはめて回転する数にマイナスを付けると、次の関係が導かれる。

R2)(s − pop1) (s − pop2) ···(s − popN) の位相は、反時計回りに−0.5 (N − nop) 回転し、時計回りに −0.5nop 回転する。つまり時計回りに 0.5 (N − nop) − 0.5nop = 0.5N − nop 回転する。R1) と R2) より、(5) 式から、ω を−∞ から∞ まで変化させたとき、

$$n = (-0.5N + ncl) + (0.5N - nop) = ncl - nop \quad (7)$$

が成り立ち、(3) 式が証明される。

3. まとめ

s が右半平面を囲う前提を用いない、新しいナイキストの安定判別法の証明を示した。本証明法は、金型磨きロボットの制御設計の一助となる。

参考文献

[1] Hendrik W. Bode, Network Analysis and Feedback Ampli-er Design, Van Nostrand, pp. 137-169 (1945)

[2] 杉江俊治, 藤田政之, フィードバック制御入門, コロナ社(1999)

[3] Manabu Kosaka, Simple proof of Nyquist's Criterion for Stability, International Journal of Control Theory and Applications, Vol.6, No.1, pp. 29-33 (2013)

[4] 小坂 学, s が右半平面を囲うことを前提としないナイキストの安定判別法の証明, 計測自動制御学会論文集, Vol.49, No.4, pp. 497-498 (2013)