

# 金型磨きロボットに応用する冗長駆動パラレルロボットの機構特性

メカニクス系工学専攻 教授 原田 孝

## 1. 緒言

冗長駆動パラレルロボットでは、転置ヤコビ行列の零空間を用いて出力節で発生する力に影響を及ぼさないアクチュエータ力を内力として加えることが出来る。この内力を利用して機構全体の剛性を大きくしたり、対偶に与圧を加えてガタを取り除くなどの研究が行われている<sup>[1][2]</sup>。内力を計算するためには転置ヤコビ行列の零空間を求める必要がある。転置ヤコビ行列の零空間は特異値分解を用いた数値計算が一般的であるが、数値計算では機構の特性を構造的にとらえることができない。本報では冗長駆動パラレルロボットにおいて、転置ヤコビ行列の零空間の基底行列をクラメル公式を用いて数式的に解く方法を提案する。これにより、冗長駆動パラレルロボットの機構特性を数式的に解析することが可能である。出力節が空間3自由度を有する冗長駆動 DELTA ロボットの転置ヤコビ行列の特徴を利用して、零空間の基底行列を用いた内力の数式計算例を示す。

## 2. 冗長駆動パラレルロボットの転置ヤコビ行列と内力

パラレルロボットの出力節が動作する空間の自由度を  $n$ 、アクチュエータの数を  $m$  とする。冗長駆動パラレルロボットでは  $m > n$  である。 $\rho = (m - n)$  を冗長度として定義する。出力節の変位と力を  $n \times 1$  列ベクトルである  $\mathbf{x}$  および  $\mathbf{f}_x$ 、アクチュエータの変位と力を  $m \times 1$  列ベクトルである  $\mathbf{q}$  および  $\mathbf{f}_q$  とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1 \ \cdots \ x_n]^T, \mathbf{f}_x = [f_{x1} \ \cdots \ f_{xn}]^T \\ \mathbf{q} &= [q_1 \ \cdots \ q_m]^T, \mathbf{f}_q = [f_{q1} \ \cdots \ f_{qm}]^T \end{aligned} \quad (1)$$

速度および力のキネトスタティックな関係式<sup>[3]</sup>は、

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{J}^T \mathbf{f}_q \quad (4)$$

となる。 $\mathbf{J}_x$  は  $n \times m$ 、 $\mathbf{J}_q$  は  $m \times m$ 、 $\mathbf{J}^T$  は  $n \times m$  の転置ヤコビ行列である。式(4)を  $\mathbf{f}_q$  について解くと、

$$\mathbf{f}_q = (\mathbf{J}^T)^+ \mathbf{f}_x + \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} \quad (5)$$

となる。 $(\mathbf{J}^T)^+$  は  $\mathbf{J}^T$  の擬似逆行列、 $\mathbf{H}$  は  $\mathbf{J}^T$  の零空間を与える  $m \times \rho$  の射影行列であり、

$$\mathbf{J}^T \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (6)$$

の関係を満たす。 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \dots, \sigma_\rho]^T$  は  $\rho \times 1$  の任意の列ベクトルである。式(5)の右辺第2項  $\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}$  が冗長駆動パラレルロボットの内力となり、式(5)を式(4)に代入すると、式(7)のように内力成分は出力節の外力に影響を及ぼさない。

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{J}^T ((\mathbf{J}^T)^+ \mathbf{f}_x + \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}_x + \mathbf{J}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_x \quad (7)$$

## 3. 冗長駆動パラレルロボット内力の数式計算

出力節が空間3自由度を並進運動し( $n=3$ )、 $m$  個のアクチュエータで冗長駆動される冗長駆動 DELTA

ロボットを事例として内力の数式計算方法を示す。冗長駆動 DELTA ロボットのヤコビ行列は、

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{mx} & v_{my} & v_{mz} \end{bmatrix}, \mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{a}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{v}_m^T \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

で与えられる。\$\mathbf{v}\_i\$ はロッドの単位方向ベクトル、\$\mathbf{a}\_i\$ はアーム方向に直交する単位方向ベクトルである。式(8)は図1に示すようなアクチュエータとして回転するモータを用いた DELTA ロボットのヤコビ行列である。転置ヤコビ行列 \$\mathbf{J}^T\$ は、

$$\mathbf{J}^T = (\mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x)^T = \mathbf{J}_x^T (\mathbf{J}_q^{-1})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_m \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{v}_m^T \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる。クラメルの公式を用いて冗長駆動 DELTA ロボットの転置ヤコビ行列の零空間を与える基底行列 \$\mathbf{H}\$ は、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{a}_1}{\mathbf{v}_4^T \mathbf{a}_4} \det([\mathbf{v}_4 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]) & \dots & \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{a}_1}{\mathbf{v}_m^T \mathbf{a}_m} \det([\mathbf{v}_m \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]) \\ \frac{\mathbf{v}_2^T \mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_4^T \mathbf{a}_4} \det([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_4 \ \mathbf{v}_3]) & \dots & \frac{\mathbf{v}_2^T \mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_m^T \mathbf{a}_m} \det([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_m \ \mathbf{v}_3]) \\ \frac{\mathbf{v}_3^T \mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_4^T \mathbf{a}_4} \det([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_4]) & \dots & \frac{\mathbf{v}_3^T \mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_m^T \mathbf{a}_m} \det([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_m]) \\ -\det([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\det([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]) \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる<sup>[4]</sup>。式(5)の右辺第二項の \$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}\$ はアクチュエータ力の内力成分である。この力を出力節の対偶に加わるロッド方向の内力 \$f\_{vi}\$ へ変換する。ロッドとアームの接点の力のつり合い式は以下ようになる。

$$f_{qi} \mathbf{a}_i + f_{mi} \mathbf{m}_i + f_{ni} \mathbf{n}_i + f_{vi} \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (11)$$

\$\mathbf{m}\_i, \mathbf{n}\_i\$ は \$\mathbf{a}\_i\$ と直交する接点の拘束力方向ベクトルである。\$\mathbf{a}\_i\$ との内積を計算し、ロッド方向内力を得る。

$$f_{ci} \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + f_{mi} \mathbf{a}_i^T \mathbf{m}_i + f_{ni} \mathbf{a}_i^T \mathbf{n}_i + f_{vi} \mathbf{a}_i^T \mathbf{v}_i = f_{ci} + f_{vi} \mathbf{a}_i^T \mathbf{v}_i = 0$$

$$f_{vi} = \frac{-1}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{v}_i} f_{ci} \quad (12)$$

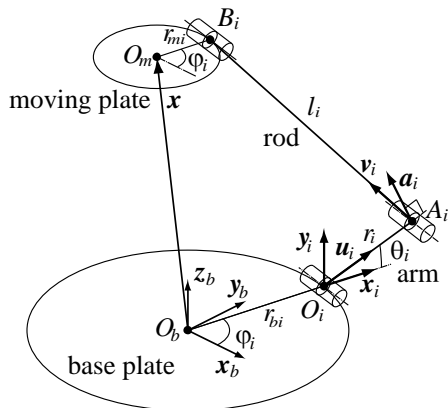


Fig.1 Kinematic model of DELAT robot

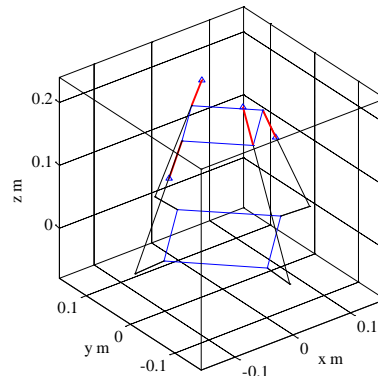


Fig.2 Internal axial forces

以上より，出力節に加わる内力の数式解法として，

$$\begin{bmatrix} f_{v1} \\ f_{v2} \\ f_{v3} \\ f_{v4} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{vm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(\mathbf{v}_4 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) & \cdots & \det(\mathbf{v}_m \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) \\ \det(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_4 \ \mathbf{v}_3) & \cdots & \det(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_m \ \mathbf{v}_3) \\ \det(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_4) & \cdots & \det(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_m) \\ -\det(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -\det(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \quad (13)$$

を導出した． $\boldsymbol{\sigma}$ は内力を与える $\rho \times 1$ の任意の列ベクトルである．式(13)に示すように，出力節の内力に関する転置ヤコビ行列の零空間の基底行列  $\mathbf{H}$  は，3本のロッドの方向ベクトルを列ベクトルとする行列の行列式を要素する簡単な形式で表現されることがわかる．

#### 4. 数値計算

$\sigma=10\text{N}$  と設定した時のロボットの内力を計算した結果を図 2 に示す<sup>[3]</sup>．内力をロッド軸力に換算し，ロッドとムービングプレートとの対偶点  $B_i$  を起点として図示している．軸力の総和はゼロとなり，外力に影響を及ぼさない．数値計算により正しく内力を計算していることを確認した．

#### 5. 結 言

冗長駆動パラレルロボットにおいて，転置ヤコビ行列の零空間の基底行列を数式的に解いて出力節に加わる内力を導出する方法を提案した．提案した内力の計算方法は金型磨きロボットの制御に実装している．

#### 参 考 文 献

- [1] Adli, M. A., Nagai, K., Miyataka, K., and Hanafusa, H., "Internal force analysis and its applications in parallel manipulators", *Proceedings of 1990 Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, vol. 1, (1990), pp. 69-72.
- [2] 三谷 篤史, 秋下 貞夫, "4 関節型平面パラレルメカニズムの冗長駆動による内力を利用した速度/加速度", *機論 C*, 69(683), (2003), pp.1843-1850
- [3] 原田 孝ほか, "スロットレス DD モータを用いた冗長駆動 DELTA 型パラレルロボットの開発", *日本機械学会 2013 年度年次大会講演論文集(CD-R)*, (2013), S115011, 5 pages.
- [4] 原田 孝, "冗長駆動パラレルロボット内力の数式計算方法", *日本機械学会 2014 年度年次大会講演論文集(CD-R)*, (2014), S1120103, 5 pages.